CRISTIAN PRESURĂ

FIZICA POVESTITĂ

Prefaţă de
MIRCEA PENŢIA

HUMANITAS
BUCUREŞTI

Cuprins

1

Începuturile astronomiei

Obiectul fizicii este universul material în care trăim, iar scopul ei este în esență explicitarea comportamentului acestui univers. Pentru aceasta, fizica are nevoie de un limbaj și de o metodă de analiză. În prima secțiune vom discuta puțin forma acestui limbaj (matematica) și limitările sale. În secțiunile ce urmează vom exemplifica metoda de analiză cu ajutorul unor noțiuni de astronomie.

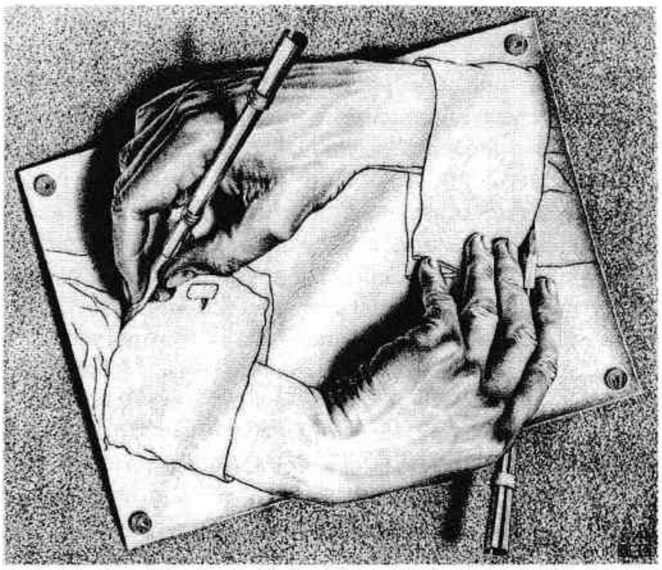

Figura 1.1: *O mână ce o desenează pe cealaltă, într-o cunoscută lucrare a artistului olandez Maurits Escher. Care mână este a Creatorului și care mână aparține creației sale? „Drawing Hands" (c) 2010 The M.C. Escher Company - the Netherlands. Toate drepturile rezervate. Imagine folosită cu permisiunea www.mcescher.com.*

1. Limbajul naturii și limitele sale

Einstein spunea odată că lucrul cel mai de neînțeles este că *lumea poate fi înțeleasă*. Ciudat, nu? Ne-am fi așteptat ca lumea să fie o colecție haotică de întâmplări singulare și complet imprevizibile, un univers în care se poate întâmpla orice și oricând. Dar universul își are legile lui, pe care oamenii de știință încearcă să le descopere.

Ploaia, de exemplu, cade mereu de sus în jos și nu ne așteptăm să ne punem umbrela sub picioare atunci când ieșim din casă. Există deci o lege a ploii, care ne spune că picăturile acesteia cad în jos. Fenomenul are loc mereu în același fel, în mod natural. Observația scoate în evidență o *ordine* în univers, ordine relevată de știință prin experimente repetabile.

Să observăm că ordinea universului o „citim" în limbajul matematicii. Dacă avem două monede de cinci lei, știm că sunt în total zece lei. Dacă trenul pleacă din București la o oră și știm cât de repede merge, putem prezice când ajunge la Râmnicu Vâlcea. Poziția unei stele o măsurăm pe cer și o scriem în caiet cu ajutorul unor numere. Putem prezice unde se va află steaua peste două ore, dacă luăm în calcul rotația boltei cerești în jurul Pământului, adunând și înmulțind numere.

Matematica stă la baza fizicii și a modului de percepere a universului. Fără să numărăm nu putem aborda problema ordinii universului, iar fără să învățăm să rezolvăm integrale nu vom rezolva ecuațiile fizicii. *Matematica este limbajul naturii*, așa cum s-a afirmat adeseori.

Desigur, se prea poate ca această afirmație să fie falsă și niște extraterestri să găsească un alt limbaj al naturii. La urma urmei misticii au altă părere, spunând că universul este înțeles prin intuiție, iar poeții spun că universul ne „vorbește" prin frumusețea naturii. În cartea de față noi ne vom limita la limbajul matematicii pentru a descoperi tainele universului material.

Matematicianul Bertrand Russell (1872-1970) a încercat să încapsuleze toată logica matematicii în cartea sa „Principia mathematica", pentru a demonstra *noncontradicția* și *completitudinea* matematicii, fără să reușească decât parțial. Pentru cei curioși, „Principia mathematica" este o carte atipică. După o scurtă introducere, urmează mii de propoziții logice care se deduc una din alta. Este ca și cum Russell ar încerca să ne convingă că universul are o structură logică, ce se reconstruiește folosind propoziții logice deduse una din alta, cu ajutorul unor reguli definite dinainte.

Foarte încântați, mulți oameni de știință au ridicat matematica în sfera abstractului, undeva dincolo de univers, instrumente aparținând aceleiași lumi (tot numere, simbolurile noastre, dar care descriu de această dată metalimbajul). Propoziția construită de Gödel care nu poate fi demonstrată este de fapt enunțul menționat de noi deja, „Propoziția aceasta este falsă”, scris în metalimbajul numerelor și care se referă tot la numere.

Teorema de incompletitudine a lui Gödel nu a rămas în aria filozofiei. Astfel, matematicienii chiar au găsit o propoziție matematică care nu se poate demonstra nici că e falsă nici că e adevarată. Ea se referă la numărul de elemente pe care le au diferite mulțimi (finite sau infinite), număr ce poartă denumirea de *cardinal* în matematică.

Astfel, paradoxal, numărul infinit de elemente al mulțimii numerelor naturale (cardinalul numerelor naturale) este diferit de numărul infinit al elementelor mulțimii numerelor reale (cardinalul numerelor reale). Ciudat nu? Două numere infinite care sunt *diferite*. Acest lucru este posibil, pentru că nu există o relație bijectivă (unu la unu) între elementele celor două mulțimi (vezi figura 1.2).

Ne putem întreba dacă există mulțimi infinite al căror cardinal să se afle *între* cel al numerelor naturale și cel al numerelor reale (care este evident mai mare). Asemănător teoremei lui Gödel, matematicienii au arătat că nu vom demonstra niciodată răspunsul la această întrebare, pentru că ea nu are o succesiune de propoziții logice care să conducă la afirmarea sau negarea ei!

Este desigur fascinant să știm *cu siguranță* că nu putem demonstra vreodată răspunsul la o întrebare anume. În acest fel testăm în mod direct limitele cunoașterii noastre umane prin intermediul matematicii.

2. Forma Pământului

În această secțiune vom exemplifica metoda de lucru din fizică printr-o scurtă introducere în astronomie, pornind de la observații simple, accesibile și nouă, dar care ascund în ele esența lucrurilor.

Pentru grecii antici, răsăritul și apusul zilnic al Soarelui era o enigmă. Unii, de exemplu Xenofan (570-480 î.H.), credeau că Soarele este o colecție de pietre de foc, care se adună în fiecare dimineață ca să formeze Soarele, pentru a se despărți apoi seara. Alții credeau că Soarele este mereu altul în fiecare dimineață. Era greu de spus pe atunci ce este Soarele.

Astăzi, putem aduce următorul argument pentru natura Soarelui. Dacă am măsura mișcarea Soarelui pe cer, am găsi că ea este *uniformă*, cu o viteză de 5 grade pe oră. Aceasta conduce la o rotație de 360 de grade în 24 de ore (adică într-o zi), reprezentând unghiul subîntins de un cerc complet. Pentru noi este atunci ușor să presupunem că Soarele descrie un cerc complet și deci *ocolește* Pământul (vezi Figura 1.3). Acesta este un exemplu în care am descrie un fenomen fizic (mișcarea Soarelui) printr-un model matematic (mișcarea circulară uniformă), pentru că modelul matematic explică în esență comportamentul observat.

Pentru vechii greci, argumentele de mai sus nu erau așa de clare, însă o parte dintre ei au ajuns la aceeași concluzie,

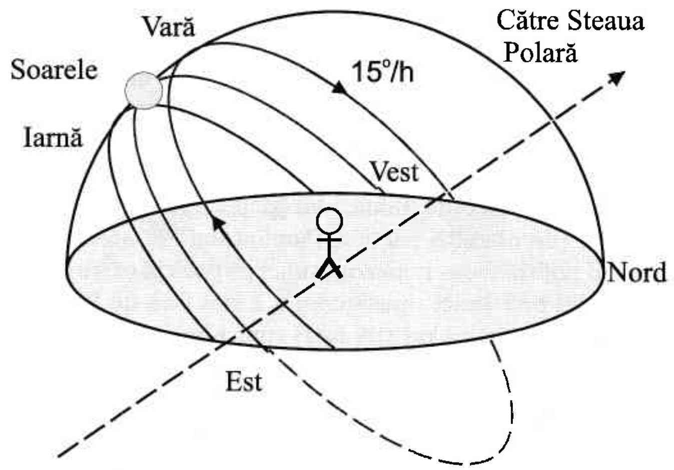

Figura 1.3: *Mișcarea zilnică a Soarelui pe cer, în diverse anotimpuri. De observat că Soarele se mișcă aparent pe cer cu o viteză de* 15° *pe oră, adică exact* 360° *pe zi, atât cât îi trebuie ca să ocolească Pământul.*

cum că Soarele ocolește Pământul. Faptul că Pământul poate fi ocolit a fost acceptat greu, căci el părea uriaș și nimeni nu îi văzuse capătul. Dar dacă poate fi ocolit, înseamnă că are formă. Indienii credeau că Pământul este plat ca o farfurie, purtat pe spate de un elefant. Mulți dintre filozofii greci credeau însă că Pământul este *rotund*, în special deoarece cercul era considerat o formă perfectă. Dintre ei s-au remarcat Pitagora (570 î.H. - 495 î.H.), Eudoxos (408 î.H. - 355 î.H.) și filozoful Aristotel (384 î.H. - 322 î.H.), care au contribuit la formarea acestor idei, adăugând informații despre eclipsele de Lună.

În momentele de eclipsă (care are loc mereu noaptea), Luna dispare pentru moment de pe cerul nopții într-un con de umbră, iar Soarele nu se vede oricum. Cu toate acestea, putem încerca să aflăm poziția *extrapolată* a Soarelui de cealaltă parte a Pământului, dacă avem un ceas care să

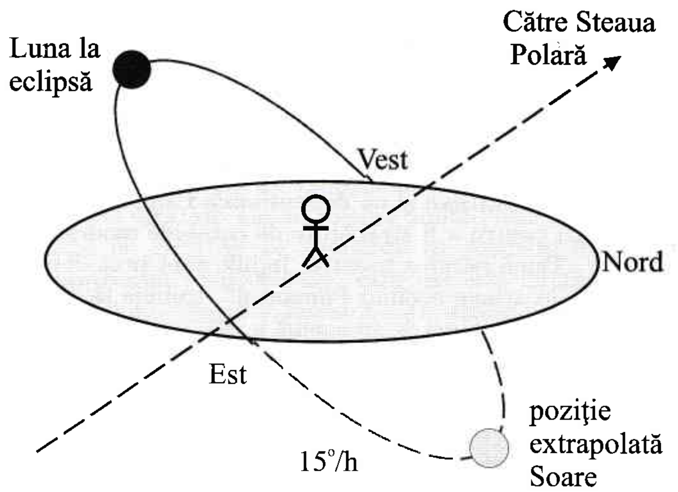

Figura 1.4: *Poziția Lunii și a Soarelui în momentul eclipsei de Lună. Poziția Soarelui este obținută prin extrapolare, ținând cont că se mișcă cu o viteză aparentă de* 15° *pe oră.*

și Pământ rotund). Eratostene a trăit însă după Aristotel și cunoștea părerea maestrului că Pământul este rotund, așa că el a considerat acest caz, aflând astfel dimensiunea corectă a Pământului.

Două concluzii sunt demne de reținut din această poveste. Prima concluzie spune că este bine să vedem care sunt și părerile înaintașilor noștri, să nu credem că putem afla întreg răspunsul corect numai cu ceea ce cunoaștem noi. A doua concluzie, mai importantă, ne spune că unele experimente sunt „după colț", adică pot fi făcute repede, *odată ce premisele sunt ghicite corect.* O umbră de 25 de centimetri este vizibilă pentru oricine, iar experimentul poate fi făcut de către un grup de școlari în excursie de la Baia Mare la București. Oare câte astfel de experimente nu s-ar putea face în fizică, psihologie sau biologie, numai dacă am ghici premisele corecte, numai dacă am ști după care „colț" să ne uităm?

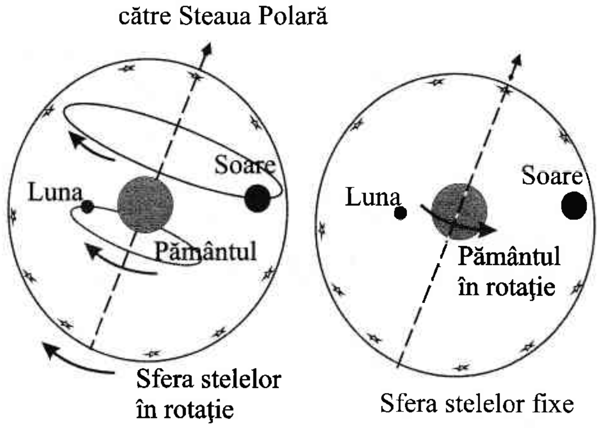

Figura 1.6: *Stânga: Pământul este nemișcat, iar Luna, Soarele și sfera stelelor se rotesc în jurul Pământului sincron, cu o perioadă de 24 de ore. Dreapta: Pământul se învârte în jurul axei orientate către Steaua Polară (în sens opus!) la 24 de ore, în timp ce Luna, Soarele și stelele rămân fixe pe parcursul unei zile.*

4. Mișcarea Pământului în jurul propriei axe

Am văzut în secțiunile precedente cum Aristotel a dedus în mod corect că Pământul este rotund și cum Eratostene i-a calculat raza. Am folosit însă pe ascuns în determinarea formei Pământului un lucru esențial, și anume că umbra Pământului se poate forma pe Lună, cu alte cuvinte că Luna este un *corp material* și nu doar o imagine proiectată pe cer. Astăzi acest lucru ni se pare normal, însă să nu uităm că, la inceputurile astronomiei, vechii greci (cu metoda lor geometrică, la fel ca și babilonienii cu metoda aritmetică) nu aveau prea multe informații despre natura fizică a obiectelor cerești.

Convingerea că Luna, împreună cu celelalte corpuri cerești (Soare, stele, stele căzătoare etc.) sunt corpuri materiale (un fel de bolovani cerești) a câștigat în popularitate odată cu căderea unui mare meteorit lângă Aigos Potamoi, în anul 467 î.H. Evenimentul l-a determinat pe Anaxagoras din Clazomenae (500î.H.-428î.H.) să presupună că însuși Soarele este o piatră roșie fierbinte mai mare decât peninsula Peloponez! Astronomia a devenit astfel și astrofizică. De acum încolo ne vom ocupa nu numai cu *măsurarea și modelarea* mișcării acestor „pietre" prin spațiu, mișcare văzută de pe Pământ, dar și cu aflarea compoziției acestora.

În continuare vom vorbi despre determinarea aproximativă a proprietăților sistemului Pământ-Soare-Lună, folosind alte câteva exemple cheie din istoria astronomiei. Încercăm să-l facem pe cititor să înteleagă că în multe cazuri măsurătoarea propriu-zisă poate fi efectuată de către cititor însuși, fără metode sofisticate. Ceea ce este cu adevarat revoluționar este *ideea* de a efectua o anumită măsuratoare. Așa cum am menționat deja, ideile noi și măsurătorile cruciale sunt „după colț", trebuie să știm numai după *care* colț să ne uităm.

Dacă privim bolta cerească în timpul zilei și în timpul nopții, vom vedea cum obiectele de pe firmament (Soarele, Luna și celelalte stele fixate pe ea ca pe o cortină) se mișcă încontinuu. Pornind de la premisa că Pământul este rotund și fix, vom deduce că această mișcare este de rotație în jurul Pământului. La intervale mai mari de timp (săptămâni sau luni), Soarele își schimbă poziția pe bolta cerească după cum se observă în figura 1.3. De asemenea, și mișcarea Lunii se modifică. Dar în decursul unei singure zile putem presupune cu o rezonabilă aproximație că *întreaga* boltă cerească se învârte sincron în jurul Pământului.

Situația este oarecum surprinzătoare. Avem trei tipuri de obiecte celeste (Soarele, Luna și stelele), care se învârt sincron în jurul Pământului. De ce însă s-ar învârti sincron? Și de ce în jurul aceleiași axe, orientată înspre Steaua Polară? De ce aceste *coincidențe*?

Răspunsul pare natural astăzi. Astfel, este mult mai ușor să presupunem că Pământul se rotește zilnic *în jurul axei sale*, și atunci mișcarea zilnică a boltei cerești este doar relativă (vezi Figura 1.6). Pentru vechii greci însă, mobilitatea Pământului era o problemă serioasă de filozofie, așa încât ei n-au acceptat răspunsul așa de ușor.

La urma urmei, să ne imaginăm și noi că Pământul cu o rază de 6000 de km se rotește zilnic (vezi figura 1.7). Atunci, un corp de pe suprafața sa străbate în 24 de ore aproximativ 40 000 km, cam cât este circumferința Pământului. Aceasta înseamnă că viteza la suprafața Pământului este de ordinul a o mie și jumătate de km pe oră. Simțim noi aceste viteze amețitoare? Nu! În plus, dacă lăsăm o piatră să cadă de la o înălțime de câțiva metri, ea ar trebui să rămână în urmă, pentru că Pământul se învârte *între timp* sub piatră. Lăsată să cadă de la 20 de metri, piatra ar atinge Pământul după aproximativ două secunde. În acest timp suprafața Pămîntului se deplasează cu aproape un kilometru și deci piatra ar atinge Pământul un kilometru mai departe. Absurd, așa ceva nu se observă!

Remarcați că acest din urmă argument este *fizic* și el se numără printre cele care au ținut Pământul imobil în

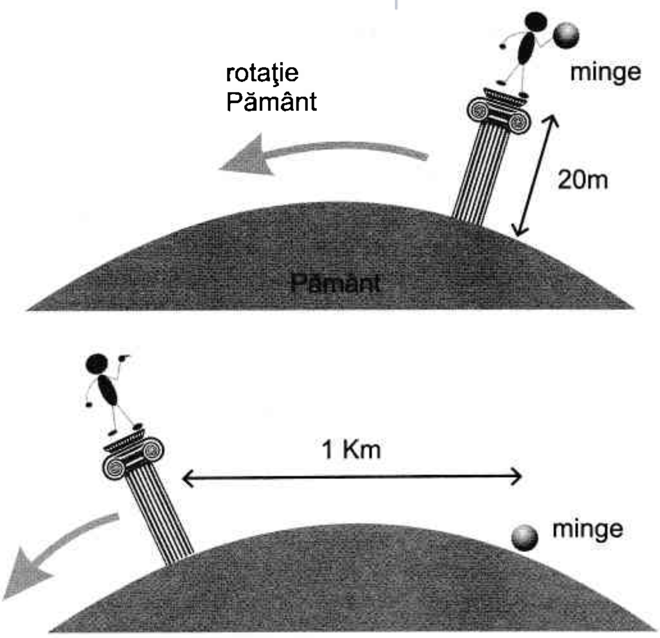

Figura 1.7: *Efectul așteptat al rotației Pământului asupra căderii libere. În dreapta sus este prezentată o persoană așezată pe o coloană, și care lasă sa cadă liber o minge. Coloana are aproximativ 20 de metri iar timpul de cădere este de aproximativ două secunde. În acest timp de cădere, dacă Pământul s-ar învârti, atunci coloana s-ar deplasa aproximativ un kilometru până ca mingea să atingă Pământul. Evident, un astfel de efect nu este observat, deci s-ar putea deduce că Pământul nu se învarte în jurul axei sale. Și totusi, astăzi știm că Pământul se învârte. Unde este greșeala?*

modelele astronomilor mai mult de o mie de ani. Cu alte cuvinte, nu a fost vorba de vreo ignoranță religioasă, deoarece chiar și unii oamenii de știință argumentau în acest fel că Pământul nu se poate roti. La fel cum, peste ani, alți oameni de știință au argumentat că nici un avion nu se poate ridica de la Pământ pentru că este mai greu decât aerul, sau la începutul erei automobilului, că omul nu va supraviețui unor viteze mai mari decât cele ale căruței.

A trebuit să vină Galileo Galilei (1564-1642) să afirme că totuși Pământul se învârte în jurul axei sale. Soluția lui spune că piatra, odată lăsată să cadă liber de la câțiva metri înălțime, primește un impuls suplimentar în direcția de rotație a Pământului. Aceasta face ca piatra să pornească având viteză mare într-o mișcare paralelă cu Pământul, perfect *sincron* cu el, în așa fel încât nouă să nu ni se pară că ea rămâne în urmă în timpul căderii.

Impulsul imprimat de Pământ pietrei este folosit în prezent la lansarea rachetelor de pe Pământ, care se face în locuri cât mai aproape de Ecuator (un exemplu este Cape Canaveral, care se află în Florida, în sudul Americii), în așa fel încât viteza imprimată de Pământ să fie cât mai mare. Iar noi, pe suprafața Pământului, ne deplasăm *într-adevăr* cu o mie de kilometri pe oră odată cu rotația Pământului, fără să simțim însă incredibila rapiditate a acestei mișcări.

5. Avantajul practic al stelelor fixe

În secțiunea precedentă am construit un prim sistem cosmologic, cel în care Luna, Soarele și stelele sunt fixe în spațiu iar Pământul rotund se învîrte în jurul axei sale cu o perioadă de 24 de ore. După ce contemplăm pentru scurt timp simplitatea acestui sistem, ne vom întreba, ce se întâmplă pe perioade mai mari de timp? Desigur, într-o zi Pământul se învârte în jurul axei sale, ceea ce face ca Soarele, Luna și bolta de stele să se deplaseze *aparent* pe cer în sens invers, deși ele sunt fixe în spațiu. Dar într-o lună? Dar într-un an? Își schimbă Soarele, Luna și stelele poziția fixă în spațiu (față de Pământul care se învârte) pe perioade lungi de timp?

Răspunsul trebuie să fie afirmativ deoarece în decursul unui an de zile Soarele își schimbă poziția pe cer. În timpul verii el ajunge deasupra noastră, iar în timpul iernii are în mod constant o poziție mult mai joasă pe bolta cerească. Majoritatea stelelor nu își schimbă însă poziția față de Pământul rotitor pe durata mai multor ani, sau cel puțin nu atât de mult încât s-o putem vedea cu mijloacele noastre simple.

Eliminând câțiva aștri cerești strălucitori (denumiți *planete*, de la cuvântul grecesc pentru „rătăcitor"), restul de mii de stele fixe își păstrează, pe tot parcursul anilor cuprinși în viața unui om, aceeași poziție față de Pământul rotitor, deci par fixe în spațiul aproape infinit. De fapt, de aceea se și numesc *stele fixe*, pentru că ele par bătute în cuie în spațiul îndepărtat. Mișcarea lor aparentă (zilnică) pe bolta cerească se datorează doar rotației Pământului.

Deoarece suntem interesați de mișcările Lunii și Soarelui pe un interval de timp de ordinul anilor sau lunilor, o idee bună ne-ar fi de folos. Ce-ar fi dacă mișcarea Lunii am măsura-o nu raportată la Pământ, pentru că acesta se învârte în jurul axei sale, ci *raportată direct la poziția stelelor fixe?* Acest lucru este ușor de realizat pentru Lună, căci pe ea o vedem noaptea în marea de stele (vezi figura 1.8). În acest fel nu mai trebuie să măsurăm înclinarea Lunii față de orizont și să corectăm cu mișcarea de rotație a Pământului, ci măsurăm direct poziția Lunii față de stelele de pe bolta cerească.

Uitându-ne la Lună noaptea pe cer, nu avem decât să-i identificăm poziția în raport cu constelațiile în jurul cărora se află și să-i desenăm apoi poziția pe harta cerească. Dacă unim punctele ce reprezintă poziția Lunii, vom avea mișcarea aparentă a Lunii pe cer raportată la stelele fixe. O astfel de manieră de lucru are un avantaj *experimental* major: putem măsura foarte ușor poziția Lunii (sau a planetelor) raportată la stelele fixe și nu trebuie să ne mai pese mult de rotația precisă a Pământului. Aici natura ne-a ajutat, căci harta stelelor fixe rămâne neschimbată pentru ani de zile.

Dacă notăm în fiecare noapte poziția Lunii față de stelele fixe, observăm că ea străbate într-o lună întreaga boltă cerească. Aceasta înseamnă că Luna nu este fixă în spațiu, ci efectuează o mișcare circulară uniformă, pe o sferă cu

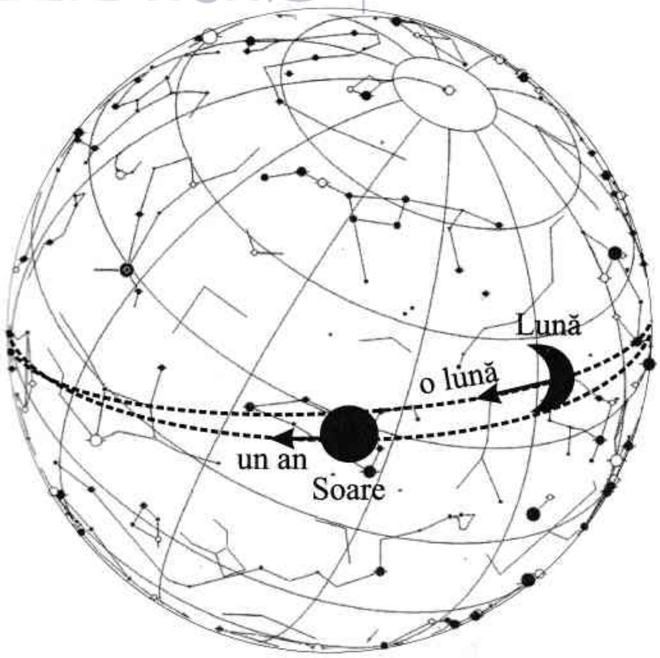

Figura 1.8: *Mișcarea Lunii și Soarelui în marea de stele fixe. O astfel de mișcare poate fi prezentată pe o hartă cerească ce se citește astfel: noi ne aflăm în centrul sferei (unde este virtual Pământul rotitor) și privim în afară spre suprafața sferei (pe care sunt desenate stelele și constelațiile). În timpul zilei, lumina stelelor pe care ar trebui sa le vedem este eclipsată de lumina foarte puternică a Soarelui, de aceea doar Soarele este vizibil, nu și stelele.*

centrul aflat pe Pământ, cu o perioadă de o lună (vezi figura 1.8). Cum mărimea *aparentă* a Lunii pe cer nu se schimbă, nu rămâne decât să tragem concluzia că Luna se învârte în jurul Pământului pe un cerc, la distanță *constantă* față de Pământ, cu o perioadă a mișcării egală cu o lună.

Aceleași considerații se aplică și Soarelui, dacă folosim poziția sa *extrapolată* de la miezul nopții (ora 24), pentru a raporta mișcarea lui la bolta stelelor fixe. Și Soarele se deplasează în jurul Pământului rotitor, tot la distanță constantă față Pământ, pentru că mărimea aparentă a Soarelui nu pare să se schimbe (dacă distanța s-ar fi schimbat, atunci Soarele ar fi apărut când mai mic cand mai mare). Este interesant de remarcat că mișcarea anuală a Soarelui și cea lunară a satelitului Pământului au loc în planuri foarte apropiate (vezi figura 1.8).

6. Dimensiunea Lunii

Luna are pe cer o dimensiune unghiulară de o jumătate de grad, ușor de măsurat. *Distanța* până la Lună pare însă imposibil de măsurat, atâta timp cât nu cunoaștem mărimea ei. Astfel, Luna e mai aproape de Pământ și mai mare, sau mai departe și mai mică. Cine poate ști, atâta timp cât nu ne ducem acolo? Este atunci cu atât mai surprinzător că vechii greci au putut măsura această distanță, numai pe baza unor argumente corecte. Iar întrebarea este, cum de au reușit?

Unul dintre vechii greci, Aristarh din Samos (310î.H.-230î.H.), a pornit de la observații asupra eclipsei de Lună. După cum am menționat, eclipsa de Lună este datorată umbrei Pământului care se lasă peste Lună (vezi figura 1.9). Presupunând că Soarele este din nou la distanțe foarte îndepărtate, umbra lăsată de Pământ va fi cilindrică, iar Luna va trebui să treacă prin această zonă de umbră în timpul eclipsei. Zona de umbră are însă aproximativ dimensiunea Pământului, considerând Soarele la distanțe foarte mari.

Un prim lucru care se observă într-o eclipsă totală de Lună este faptul că umbra lasată de Pământ pe Lună este mai mare decât Luna. Pământul este deci probabil mai mare decât Luna. Urmărind evoluția umbrei lăsate de Pământ pe Lună în timpul eclipsei (sau raza de curbură a umbrei în raport cu cea a Lunii), se poate estima dimensiunea Lunii în raport cu cea a umbrei lăsate de Pământ, obținându-se un factor apropiat de doi.

Considerând că spațiul delimitat de umbră are o formă *cilindrică* (circumferința bazei cilindrului este egală cu cea a Pământului), putem deduce și noi, ca și Aristarh din Samos, că Luna trebuie să fie aproximativ jumătate cât Pământul (vezi partea de sus a figurii 1.9). Astăzi știm că Aristarh din Samos a greșit cu un factor de 2, căci lumina ce vine de la Soare nu creează chiar o umbră cilindrică, ci una *conică* (pentru că Soarele este foarte mare, vezi partea de jos a figurii 1.9), dar aceasta a devenit clar mai târziu. Astfel, Luna este de aproximativ patru ori mai mică în diametru decât Pământul.

Aristarh din Samos a trăit înaintea lui Eratostene și nu a cunoscut dimensiunea Pământului. Știind însă acum că Pământul are o rază de aproximativ 6000 km, putem

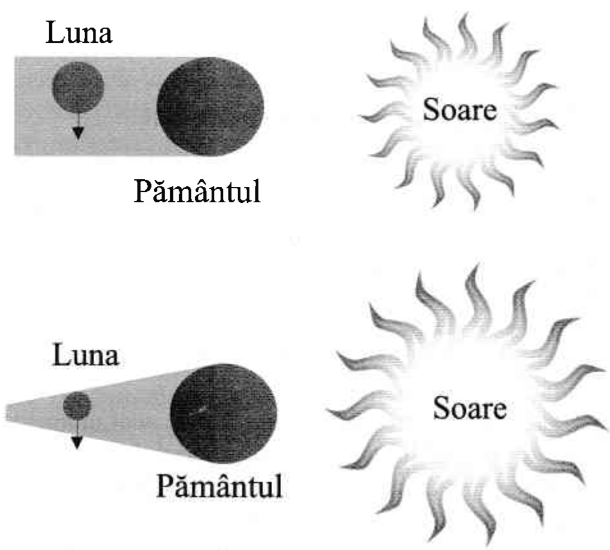

Figura 1.9: *Eclipsa de Lună în interpretarea lui Aristarh (sus) și în interpretarea modernă corectă (jos). În ambele cazuri Luna intră în conul de umbră al Pământului, atâta doar că Aristarh credea că umbra are o formă cilindrică.*

estima valoarea razei Lunii, la un sfert din această valoare, adică aproximativ 1500 km.

Dacă știm mărimea Lunii, atunci vom afla și distanța la care ea se află față de Pământ, folosind *unghiul* sub care diametrul Lunii se vede de pe Pământ și care este de o jumătate de grad. Astfel obținem o distanță de câteva sute de mii de km. Cum aparent Luna are pe cer același diametru tot timpul, înseamnă că ea se mișcă pe un cerc în jurul Pământului, la o distanță constantă de el.

Calcul: *Mărimea unui grad*

În mod normal noi nu suntem prea obișnuiți cu valoarea unui grad. El este însă a 360-a parte dintr-un cerc. Dacă luăm un ceas și încercam să vedem cu ce unghi se deplasează secundarul într-o secundă, vom obține un unghi de

$$\frac{360°}{60} = 6°$$

Un grad este deci a șasea parte din această deplasare, deci *a șasea parte din bătaia unui secundar* pe cadranul unui ceas. El pare astfel imposibil de determinat cu ochiul liber. Cu toate acestea ochiul nostru are o rezoluție unghiulară mai bună, ce poate fi estimată observând că deosebim două persoane aflate la 1 km față de noi, cu o distanță între ele de aproximativ 1 m. Rezoluția unghiulară este atunci

$$\arcsin\left(\frac{1\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{km}}\right) \approx 0,06°$$

Ea este mult mai mică decât un grad.

7. Distanța de la Soare la Pământ

Dacă știm distanța până la Lună, putem afla distanța până la Soare? Răspunsul este afirmativ și a fost dat tot de Aristarh din Samos. De data aceasta el s-a concentrat asupra *primului pătrar*, momentul când exact jumătate din Lună este vizibilă pe cerul nopții (vezi figura 1.10), datorită faptului că Soarele luminează Luna la un unghi de 90 de grade față de Pământ.

Soarele, Luna și Pământul formează în acel moment un triunghi dreptunghic, cu Luna în unghiul drept. În acest triunghi dreptunghic cunoaștem deja o latură, distanța de la Lună la Pământ. Pentru a afla direct toate elementele triunghiului, nu ne rămâne de măsurat decât unul dintre celelalte două unghiuri. Unghiul care se poate măsura *de pe Pământ* este unghiul dintre Soare-Pământ-Lună. Cum Soarele se află la o distanță foarte mare, triunghiul acesta dreptunghic este foarte alungit, iar unghiul Soare-Pământ-Lună pe care trebuie să-l măsurăm este foarte aproape de 90 de grade.

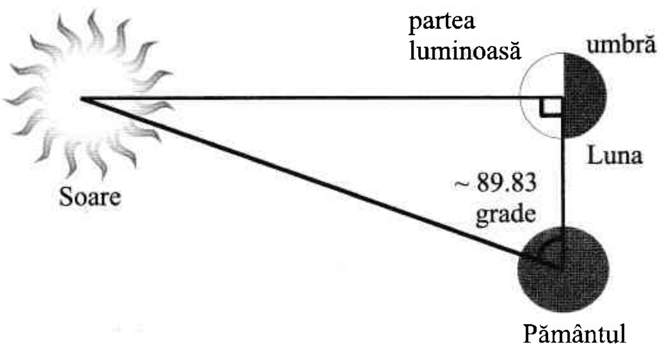

Figura 1.10: *Pozițiile Soarelui, Lunii și Pământului la „primul pătrar". Cele trei corpuri cerești formează un triunghi dreptunghic, cu Luna în unghiul drept.*

Măsurătoarea este delicată, deoarece o eroare foarte mică în determinarea acestui unghi alungește enorm triunghiul dreptunghic, conducând la erori foarte mari ale distanței dintre Soare și Pământ. Suficient să spunem că dacă unghiul iese de 90 de grade, Soarele ar trebui să se afle la o distanță infinită.

Aristarh din Samos a măsurat mai întâi un unghi Soare-Pământ-Lună de 87 de grade la primul pătrar, dar și-a corectat apoi această valoare la 89, 5 grade, după cum menționează Aristotel. Valoarea corectă este de 89, 8 grade, ceea ce înseamnă că Aristarh a obținut o diferență de 0, 5 grade față de 90 de grade, o valoare mai mult decât dublă față de diferența reală de 0, 2 grade. De aceea Aristarh a estimat o distanță până la Soare de aproximativ două ori mai mică decât cea reală.

Cunoaștem acum toate elementele triunghiului dreptunghic Pământ-Lună-Soare la primul pătrar: o catetă (distanța de la Pământ la Lună) și unghiurile sale. Putem atunci calcula distanța de la Pământ la Soare și vom obține o valoare de aproximativ 40 de milioane de km.

Cât i-ar lua unui biciclist să ajungă acolo? Aproximativ 200 de ani. Este mult, este puțin? Mai important este că știm aproximativ valoarea distanței, căci vizualizarea distanțelor depinde de epoca în care trăim. Dacă strămoșilor noștri care mergeau cu căruța de la Vâlcea la Tulcea le luau câteva zile, nouă ne ia astăzi câteva ore cu mașina. În același fel, distanța până la Soare exprimată în kilometri ni se pare mare, însă percepția depinde de epoca în care trăim și de mijloacele de transport de care dispunem.

Știind acum distanța până la Soare și mărimea lui aparentă pe cer, putem estima dimensiunea Soarelui. Astfel, în cazul eclipsei de Soare se observă că diametrul aparent al Soarelui pe cer este aproape egal cu cel al Lunii și deci de aproximativ 0, 5°. Cunoscând acum și distanța până la Soare, estimăm raza Soarelui ca fiind de 600, 000 km, adică o rază de aproximativ 100 ori mai mare decât cea a Pământului.

8. Modelul lui Ptolemeu

De multe ori în fizică progresul apare numai pe cale teoretică, reflectând asupra unor date experimentale mai vechi. Metoda este aproape întotdeauna aceeași: dacă un model nou ce explică datele experimentale *este mai simplu* decât un model vechi, atunci el este probabil și mai „adevărat". Aici este una dintre cheile succesului fizicii, faptul că fenomenele pot fi explicate în final prin modele simple. Să exemplificăm această idee printr-o scurtă incursiune în modelele planetare ale lui Ptolemeu și Copernic, în următoarele două secțiuni.

Astfel, am văzut că bazele experimentale ale fizicii au fost puse de vechii greci prin studiul astronomiei. Cum spunea domnul Dragoș Constantinescu, profesorul meu de matematică: „În geometrie, o figură desenată este o problemă pe jumătate rezolvată". La fel și în astronomie, figura a fost desenată asemănând aștrii cu niște bolovani ce se mișcă prin spațiu, acum mai trebuie doar să rezolvăm problema și să aflăm relațiile dintre ei. Iar dintre toate astrele, cele mai spectaculoase și misterioase au fost mult timp planetele, prezente în toate tabelele astrologice.

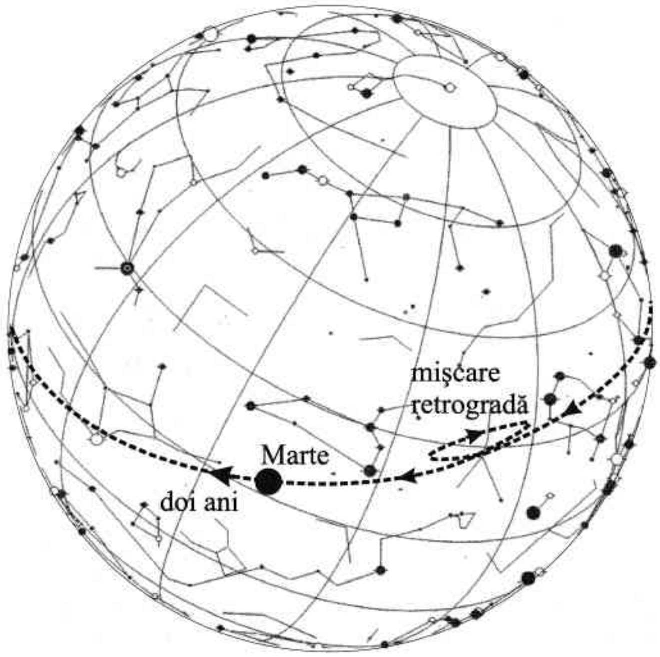

Figura 1.12: *Mișcarea planetei Marte pe bolta cerească are loc cu o perioadă de doi ani. În partea din dreapta jos a traiectoriei se recunoaște mișcarea retrogradă a planetei Marte. Aici planeta Marte își schimbă pentru puțin timp (câteva luni) direcția de mișcare pe cer.*

Figura 1.11: *Ptolemeu într-o reprezentare târzie, când el era confundat cu unul din regii Egiptului (vezi coroana de pe cap). Ptolemeu ține în mână un cuadrant, iar desenul este util pentru determinarea erorii de măsură a cuadrantului. Astfel, eroarea unghiulară este dată de unghiul celei mai mici valori citibile pe cadran. Dacă presupunem că diviziunea cea mai mică are 1 mm, iar raza aproximativă a instrumentului este de 50 cm, obținem o rezoluție de* $\alpha \approx 1/500 \approx 0{,}002$ *radiani, ori* $\alpha \approx 0{,}1^\circ$. *Reproducere din enciclopedia „Margarita philosophica" de Gregor Reisch, publicată în anul 1503.*

Să luăm de exemplu planeta Marte. Ea se deplasează printre stelele fixe cu o perioadă de doi ani, ocolind Pământul într-un plan celest care este foarte aproape de cel în care se mișcă Soarele (vezi figura 1.12). Cu toate acestea, ne lipsește un element esențial, și anume nu vedem cât de *mare* este planeta Marte (spre deosebire de cazurile Lunii și Soarelui) și deci nu știm dacă Marte își păstrează distanța constantă până la Pământ! Planeta Marte se poate îndepărta de Pământ sau apropia de el, imaginea ei rămâne pentru noi doar un punct luminos pe cerul înstelat.

Astfel, nu putem deduce automat că orbita planetei Marte este un cerc, ci numai că proiecția ei pe boltă este (în primă aproximație) un cerc. Ajungem astfel la o problemă aparent fără soluție: nu putem măsura niciodată, „în adâncime", distanța Pământ-Marte. La acest stadiu nu ne rămâne altceva de făcut decât să presupunem *momentan*, așa cum au făcut și primii astronomi, că orbita reală a planetei Marte este un cerc în jurul Pământului.

Este interesant de observat că cercul de doi ani al lui Marte printre stele nu este chiar un cerc. De fapt, la fiecare rotație, planeta Marte prezintă așa-numita *mișcare retrogradă* (vezi figura 1.12). Aici Marte nu mai merge în sensul normal pe cerc, ci o ia pentru un scurt timp înapoi! Astfel, pentru aproximativ două luni, Marte își schimbă sensul de mișcare pe o distanță aparentă pe cer de zece ori mai mare decât diametrul aparent al Lunii, o distanță ușor măsurabilă.

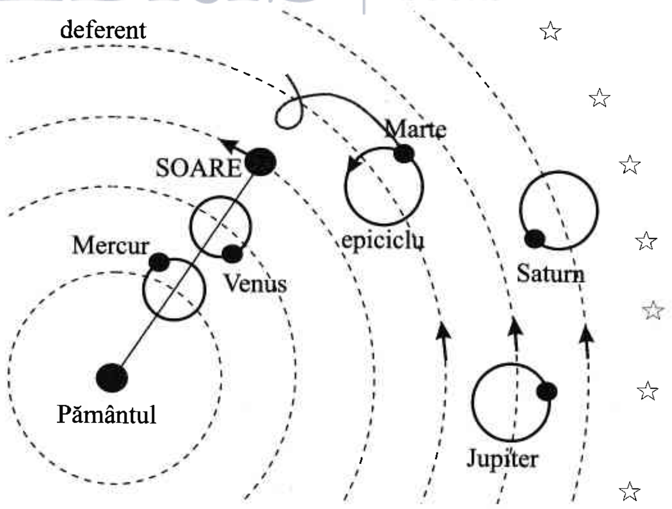

Figura 1.13: *Modelul lui Ptolemeu pentru mișcarea planetelor. De observat că centrele epiciclurilor planetelor Mercur și Venus sunt aliniate cu poziția Soarelui. Pe aceeași linie se va așeza și planeta Marte odată ce se găsește la maximul mișcării sale retrograde.*

Mișcarea retrogradă poate fi modelată, căci ea se aseamănă cu cea a unui reflector așezat pe spițele unei biciclete în mișcare. Și aici, reflectorul *pare* că merge înapoi pentru scurte momente, în direcția opusă mișcării bicicletei. Claudius Ptolemeu (90-168 d.H.) a tabelat mișcările planetei Marte și a dezvoltat un model asemănător spițelor bicicletei (vezi Fig 1.13). În acest model, Marte se mișcă mai întâi pe un cerc mai mic, numit *epiciclu*, ce ar fi analog roții în exemplul nostru. Apoi centrul cercului cel mic se mișcă pe un cerc mai mare, numit *deferent*, la 2 ani, care ar fi analogul drumului pe care se deplasează roata.

Modelul s-a dovedit insuficient și Ptolemeu a mai adăugat alte două elemente. Astfel, Pământul nu se mai află în centrul deferentului (cercul mare), ci într-o poziție excentrică, numită *epicentru*. Apoi, mișcarea epiciclului (cercul mic) pe deferent (cercul mare) nu este uniformă în raport cu centrul deferentului, ci în raport cu alt punct, numit *ecuant*. De remarcat cum, în acest caz, pentru fiecare planetă trebuie să găsim epiciclul, deferentul, epicentrul și ecuantul său. Până în epoca lui Copernic, sistemul planetar astfel construit necesita mai mult de 70 de parametri care trebuiau ajustați!

Partea interesantă este că mișcarea planetelor, astfel modelată, se corelează surprinzător cu mișcarea Soarelui. Astfel, centrul epiciclului planetelor Venus și Mercur este situat întotdeauna pe o *linie dreaptă* ce unește Soarele și Pământul (vezi figura 1.13). În plus, în momentul în care planeta Marte se află în poziția maximă a mișcării sale retrograde, cei trei aștri (Pământul, Marte și Soarele) sunt aliniați pe o linie dreaptă care îi unește.

Astfel de coincidențe nu pot fi explicate deloc de modelul lui Ptolemeu, pentru că la el Soarele și planetele se mișcă *independent* unele de celelalte în jurul Pământului. Ptolemeu trebuia să introducă aceste coincidențe ca pe un *element suplimentar* al modelului său.

Curios însă, elementul suplimentar de coincidență din sistemul lui Ptolemeu poate fi eliminat dacă vom considera că toate planetele (inclusiv Pământul) se mișcă în jurul Soarelui! Aceasta este exact supoziția lui Copernic, așa cum vom vedea în punctul următor, supoziție care simplifică astfel modelul planetar și este deci probabil mai „adevărată" (pentru că este mai simplă).

9. Sistemul lui Copernic

Sistemul lui Ptolemeu, creat în secolul II d.H. a supraviețuit mai mult de un mileniu. În secolul XV însă, au apărut alte date experimentale despre pozițiile planetelor, care nu mai erau compatibile cu vechiul sistem. În mod normal, ar fi fost de așteptat o îmbunătățire a vechiului sistem, adăugându-i-se alte mici „corecții". Cu toate acestea *un sistem cu totul nou* a fost prezentat cu argumente matematice de către Nicolaus Copernicus (1473-1543): toate planetele se mișcă în jurul Soarelui, inclusiv Pământul. Noul sistem a reușit să explice natural coincidențele din sistemul lui Ptolemeu.

Ideea nu era nouă. O propusese înainte Aristarh (cel despre care am vorbit înainte) pe baza uriașei distanțe Pământ-Soare, dar fusese respinsă din cauza credinței că Pământul era nemișcat, și deci nu se putea deplasa în jurul Soarelui. Copernic aduce tot argumente filozofice, spunând că, din moment ce Soarele este numit „lampa universului" de către unii filozofi (căci el aduce lumina), ce loc ar fi mai potrivit decât centrul universului? Copernic însă face ceva mai mult, el reușește să și explice mișcările planetelor cu noul model.

Pentru planetele „interioare" (în raport cu Pământul), Mercur și Venus, acest lucru este posibil, dacă ne uităm la modelul lui Ptolemeu (vezi 1.13). Astfel, să observăm cum *centrul* epiciclurilor celor două planete interioare este situat mereu pe aceeași linie cu Pământul și Soarele. *Distanța* până la aceste epicicluri este însă necunoscută, deci ele pot fi mai apropiate sau mai îndepărtate de Pământ. Putem așeza epiciclurile, pentru simplitate, cu centrul lor exact în Soare! Atunci, Mercur și Venus s-ar mișca în jurul Soarelui, ceea ce ar explica natural faptul că centrul epiciclurilor lor este aliniat automat cu Soarele. Iată cum numai din peniță am reușit să explicăm o coincidență și să facem modelul mai simplu.

Metoda de mai sus nu se poate aplica imediat planetei Marte. Aceasta pare că se mișcă independent față de Soare în modelul lui Ptolemeu, deși există o legătură specială între mișcarea retrogradă a lui Marte și poziția Soarelui: maximul mișcării retrograde are loc atunci când Marte, Pământul și Soarele sunt aliniate. Copernic totuși încearcă și are o surpriză uriașă: mersul retrograd al planetei Marte poate fi explicat nu numai prin epiciclul lui Ptolemeu, dar și dacă presupunem că Marte se mișcă împreună cu Pământul *în jurul Soarelui*, la o distanță mai mare de acesta! Curios, nu? Cele două sisteme sunt echivalente pentru acest fenomen matematic.

Să vedem însă cum se obține mișcarea retrogradă în modelul lui Copernic, unde atât Pământul cât și planeta Marte se învârt în jurul Soarelui în aceeași direcție (vezi figura 1.14). Astfel, Pământul are o orbită interioară (mai

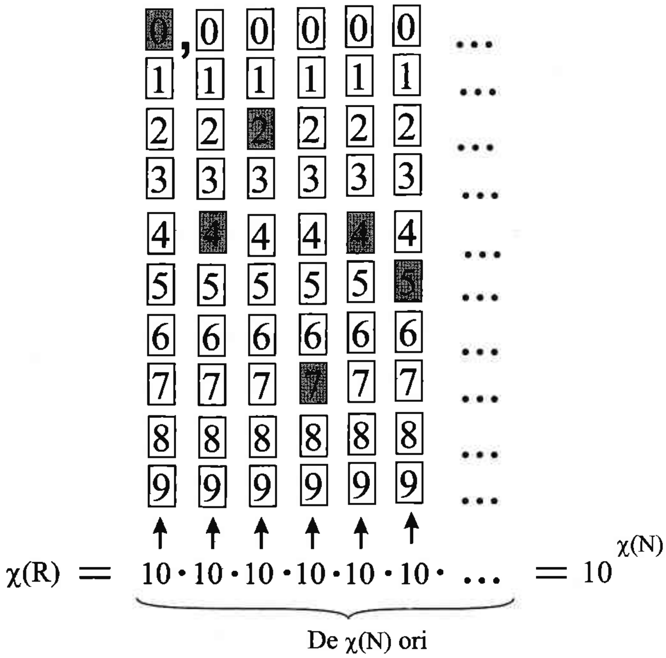

Figura 1.2: *Câte numere reale avem? Pentru fiecare cifră a numărului real avem zece alegeri. În figură este exemplificat numărul real* $0,42745\ldots$ *Numărul total* $\chi(R)$ *de numere reale este un produs al acestor posibilități* $\chi(R) = 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot \ldots$ *Dacă notăm cu* $\chi(N)$ *numărul infinit de elemente al mulțimii numerelor naturale, atunci avem* $\chi(R) = 10^{\chi(N)}$. *Interesant este că cele două numere* $\chi(N)$ *și* $\chi(R)$ *sunt infinități diferite, pentru că nu poate fi găsită o relație bijectivă între mulțimile pe care le reprezintă.*

necontaminată de timp și spațiu. Cu toate acestea, matematicianul Kurt Gödel (1906-1978) a demonstrat (culmea, matematic!) că și matematica își are limitele ei. În esență, Gödel ne spune că matematica este un doar limbaj, care face parte din această lume și care nu poate descrie complet însăși lumea din care face parte. Cu alte cuvinte, nu ne așteptăm să explicăm întreg universul, odată ce facem parte din el. Nu este nevoie să fim filozofi ca să ne dăm seama că, în acest caz, nu putem explica *totul.*

Matematica este o parte a acestei lumi, la fel cum eu sau dumneavoastră suntem parte a ei. Relația $1 + 1 = 2$ este valabilă pentru toată lumea. Dacă pun un măr lângă altul, am două, oricine este de acord cu asta, atâta timp cât nu se întâmplă nimic fizic cu merele. Și, fiindcă așa stau lucrurile pentru toți, cădem de acord și construim limbajul matematicii. Cu toate acestea, pentru că matematica este o construcție a lumii (în fond, o jonglerie cu mere), nu ne așteptăm ca ea să descrie întreaga lume din care face parte.

Nu numai obiectele pe care le folosim fac parte din lume, dar chiar și *imaginația noastră este contaminată de lume*, căci ea imită și copiază comportamentul acestei lumi. Poetul german Johann Wolfgang Goethe spunea că noi nu inventăm nimic, ci doar redescoperim. De aceea nu ne așteptăm ca matematica să poată explica *complet* însăși lumea din care face parte și care a creat-o, căci ar naște contradicții prin referințe la ea însăși.

Pentru a arăta de ce autoreferința este importantă, să considerăm enunțul „Propoziția aceasta este falsă” și să observăm că el nu este nici adevărat, nici fals. Dacă enunțul este adevărat, atunci propozitia este falsă, și deci enunțul însuși (la care face referire propoziția) este fals, ajungându-se la o contradicție. Dacă enunțul este fals, atunci propoziția trebuie să fie adevărată, ceea ce implică automat ca și enunțul (la care face referire propoziția) trebuie să fie adevărat. Ajungem iarăși la o contradicție. Vedem astfel că enunțul precedent nu este nici adevărat, nici fals. Observăm însă că acest enunț conține o referință la el însuși.

Într-un mod asemănător, Kurt Gödel a arătat la începutul secolului trecut că matematica conține anumite propoziții despre care nu se poate demonstra nici că sunt adevărate nici că sunt false, și deci este *incompletă.* Metoda lui Gödel este pe cât de interesantă, pe atât de eficientă. Astfel, Gödel urmărește ideile lui Russell, care recunoaște că matematica (și în general orice fel de limbaj) este o colecție de *simboluri.* Gödel însă are ideea genială de a considera că aceste simboluri sunt chiar numere!

Exemplul cel mai simplu este cel al jocului *opera Gusti*, un joc pe care copiii îl joacă pentru a-și transmite mesaje „secrete”. În acest joc, o parte din litere sunt înlocuite cu cifre, prin identificarea „operagusti”=„1234567890”. De exemplu, cuvântul „toiag” se scrie ca „91056”. Desigur, în cazul jocului nu avem cifre suficiente să acoperim toate literele, așa încât vom avea și cuvinte precum „5c123409” sau „c5d”.

În cazul logicii matematice, Gödel a rescris toate propozițiile logice cu numai șapte cifre, prin niște artificii ingenioase, care au minimizat simbolurile folosite. Toate simbolurile de bază din propozițiile logice, de exemplu „sau” și cuvântul „egal”, erau descrise de una dintre cele șapte cifre. În final, fiecare propoziție logică era exprimată printr-o *succesiune de cifre*, adică un număr. Adeverirea unei propoziții este de asemenea reprezentată de un număr, iar negarea acelei propoziții este un alt număr. Să remarcăm și că o succesiune de propoziții devine o *succesiune de numere.* A demonstra sau a nega o propoziție se reduce la a găsi succesiunea de numere (conform unor reguli bine stabilite) care duce la unul din cele două numere care afirmă propoziția sau o neagă.

În principiu, ne-am aștepta ca orice propoziție care poate fi formulată să fie nu numai falsă sau adevărată, dar și *demonstrabilă.* În limbajul lui Gödel, aceasta înseamnă că pentru orice propoziție logică trebuie să găsim o succesiune de numere care conduce la numărul ce reprezintă afirmația sau negația propoziției. Gödel însă a arătat că există propoziții matematice pentru care nici unul dintre cele două numere (reprezentând afirmația sau negația propoziției) nu poate fi construit ca o succesiune de numere ale propozițiilor intermediare. Cu alte cuvinte, matematica este *incompletă*, existând propoziții despre care nu se poate demonstra nici că sunt false, nici că sunt adevărate.

Demonstrația lui Gödel folosește faptul că *metalimbajul* (adică limbajul logicii) a devenit acum o succesiune de numere, succesiune căreia i se poate și ei atașa un alt număr. Pe de altă parte, acest metalimbaj (limbajul matematicii), scris cu numere, se referă tocmai la numere! Ne aflăm atunci într-o situație contradictorie, când vrem să descriem o lume (lumea numerelor, a matematicii) cu indice ora din noapte, căci știm că Soarele se deplasează cu 15 grade pe oră pe un cerc în jurul Pământului. În acest fel vom calcula unde ajunge Soarele la orice oră din noapte, de cealaltă parte a Pământului în raport cu Luna, extrapolând poziția Soarelui pe cer.

Putem prin urmare măsura nu numai poziția Lunii în nopțile cu eclipsă de Lună, dar și poziția *extrapolată* a Soarelui (de cealaltă parte a Pământului) în același moment al nopții. Vom remarca atunci că poziția extrapolată a Soarelui este exact opusă celei a Lunii față de Pământ, deducând de aici că cei trei aștri sunt aliniați în spațiu în timpul eclipsei (vezi figura 1.4).

Ajungem la aceeași concluzie ca și aceea susținută de Aristotel, care spunea că, în timpul eclipsei, *umbra* Pământului ajunge precis pe Lună și că ea este cea care ascunde Luna și creează efectul de eclipsă (vezi figura 1.9). Cum această umbră este rotundă, Pământul trebuie să fie rotund la rândul lui, a dedus Aristotel în scrierile sale. O demonstrație strălucită, am zice noi astăzi, căci astfel s-a născut întreaga astronomie. Dacă Pământul poate fi ocolit și e rotund, unde se află el și cât de departe sunt Soarele sau Luna? Dar stelele? Cât de mare este atunci Pământul?

Iată cum, pornind de la o simplă observație și gândind alfel decât majoritatea, câtiva oameni au putut avansa atât de mult în înțelegerea fenomenelor care ne înconjoară. Acum toți gândim ca Aristotel, dar să nu uităm să-i căutăm printre noi pe cei puțini care anticipează gândirea diferită a următoarelor milenii. *Să nu uităm să privim cu alți ochi lumea din jurul nostru.*

3. Dimensiunea Pământului

Să ne reamintim că expediția lui Cristofor Columb către Indii a fost finanțată de spanioli, după ce portughezii l-au refuzat. Se crede adeseori greșit că navigatorul Columb a fost refuzat de portughezi pentru că aceștia nu au crezut că Pământul e rotund, și ca atare Columb nu ar fi putut ajunge în Indii ocolindu-l.

De fapt, portughezii erau de acord că Pământul este rotund, la fel ca cei mai mulți învățați ai secolului XV, numai că toți susțineau și că *dimensiunile* Pământului sunt prea mari pentru a fi străbătute de corăbiile modeste ale vremii. „După părerea noastră, Indiile sunt prea departe pentru a le atinge ocolind Pământul", trebuie să fi spus învățații. „O să mori de sete până acolo, sau de scorbut", vor fi continuat ei. Columb însă nu a ascultat, pentru că el credea greșit că Pământul este mai mic decât în realitate, că Asia este mai mare și că se poate ajunge la ea de la celălalt capăt, i-a convins pe spanioli și a plecat. Din fericire pentru el, Columb a întâlnit America în calea sa, pentru că altfel ar fi murit sigur până să atingă pământul Indiilor! Ca să vedeți că descoperirile se fac și pornind de la premise false atunci când norocul ne stă în drum, ceea ce se întâmplă însă destul de rar.

De fapt, primul care a măsurat dimensiunile Pământului rotund a fost grecul Eratostene (276î.H.-194î.H.), cu mai

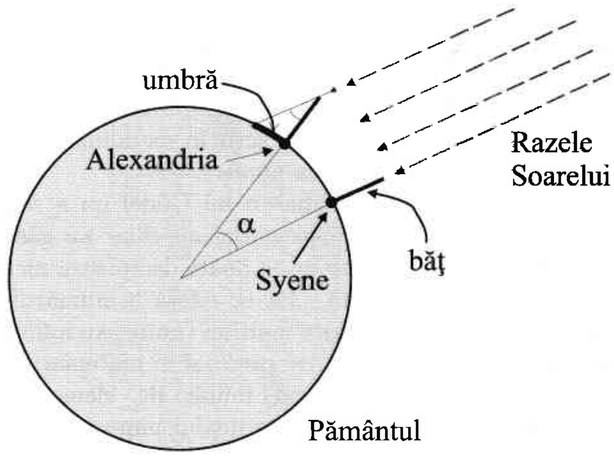

Figura 1.5: *Cum a măsurat grecul Eratostene raza Pământului. Știind înălțimea bățului (2 m), umbra lui în Alexandria (25 cm) și distanța dintre Syene și Alexandria (800 de km), puteți estima raza Pământului?*

mult de o mie de ani înaintea lui Cristofor Columb (1451-1506). Să vedem cum a măsurat Eratostene dimensiunile Pământului fără a-l înconjura și fără a avea la dispoziție laboratoare de milioane de euro.

Eratostene a observat umbra unui băț în două orașe egiptene, *în același moment* la amiază. Într-un oraș, denumit Syene, Soarele era drept deasupra capului, iar un băț vertical nu crea nicio umbră, pentru că era îndreptat chiar spre Soare (vezi figura 1.5). La aceeași oră însă, în Alexandria, orașul celebrei biblioteci, Soarele de amiază nu era drept deasupra capului. În consecință, bățul vertical, care avea să zicem o lungime de 2 metri, crea o umbră de aproape 25 de centimetri.

O astfel de situație se explică simplu, dacă vom considera că Pământul este rotund, iar Soarele este foarte departe (să zicem la milioane de kilometri). În acest caz, bățul ar fi *înclinat* diferit față de Soare, în funcție de poziția sa pe suprafața Pământului rotund și va genera umbre de lungimi diferite (vezi figura 1.5). Cunoscând distanța dintre cele două orașe (800 de km) și lungimea umbrei (25 de cm pentru un băț cu lungimea de 2m) Eratostene a estimat, folosindu-se de geometrie, că raza Pământului este de aproximativ 6000 km.

Curios însă, același efect s-ar obține și dacă Pământul ar fi *plat*, iar Soarele ar atârna la o înălțime nu prea mare de Pământ. În acest caz situația este asemănătoare cu cea în care Soarele ar fi precum un bec aflat la o înălțime mai mare decât becurile obișnuite. Și în această situație lungimea umbrei ar fi dependentă de poziția bățului aflat sub bec. Când ne aflăm sub Soarele-bec (situația orașului Syene), el se află drept deasupra capului și corpul nostru nu lasă nicio umbră. Când însă ne mutăm la o oarecare distanță (situația orașului Alexandria), vom avea o umbră care se lungește pe măsură ce ne depărtăm. Luând în calcul distanța dintre cele două orașe și mărimea umbrei, putem calcula *înălțimea* la care s-ar afla Soarele-bec și am obține de asemenea câteva mii de kilometri. Care din cele două situații este adevărată?

Din păcate, numai aceste măsurători nu pot face diferența dintre cele două situații geometrice (Pământ plat